Der Einfluß des Coulomb-Feldes und der Elektronenhülle auf die Form des radioaktiven β-Spektrums

Von CHARLOTTE und SIEGFRIED FLÜGGE

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Göttingen

(Z. Naturforschg. **2a**, 6—8 [1947]; eingegangen am 26. Sept. 1946)

Es wird gezeigt, daß für Elektronen-Energien von mehr als 50 keV auch bei den schwersten Elementen die Elektronenhülle keinen Einfluß auf die Form radioaktiver β-Spektren hat. Für den Einfluß des Coulomb-Feldes des Atomkerns wird eine Tabelle berechnet und mitgeteilt.

Seit E. Fermi 1934 eine Feldtheorie des β-Zerfalls geschaffen hat[1], besteht die Möglichkeit, das experimentelle Material über β-Spektren radioaktiver Elemente mit theoretischen Erwartungen zu vergleichen. Dieser Vergleich hat seither in beträchtlichem Umfang stattgefunden, zumal die Entdeckung der künstlichen Radioaktivität alsbald große Mengen neuen Materials erschloß. Die Übereinstimmung von Beobachtung und Erwartung ist im allgemeinen mäßig. Dies liegt sicher zu einem erheblichen Teil an systematischen Beobachtungsfehlern, wie die systematische Ausmessung des RaE-Spektrums durch A. Flammersfeld[2] zuerst klar gezeigt hat. Aber auch bei Vermeidung experimenteller Fehlerquellen bleibt der Vergleich mit der Theorie erschwert dadurch, daß oft mehrere β-Übergänge zu verschiedenen angeregten Niveaus des Folgekerns einander überlagern, deren Trennung eine zusätzliche Analyse der im Gefolge des β-Zerfalls auftretenden γ-Strahlen und eventuell die Kopplung der spektroskopischen Beobachtung mit β-γ-Koinzidenzen erfordert.

Immerhin sind in einer Reihe von Fällen diese Schwierigkeiten überwunden worden (wie eben z. B. beim RaE); auch dort ist die Übereinstimmung mit Fermis ursprünglicher Theorie unvollkommen. Nun bestehen, aus dem Studium der Kernkräfte herrührend, auch durchaus Bedenken gegen diese Theorie, und es hat auch nicht an Versuchen zu Modifikationen gefehlt, unter denen die Abwandlung durch E. J. Konopinski und G. E. Uhlenbeck[3] der bedeutendste ist, da hierbei tatsächlich die Übereinstimmung mit der Beobachtung verbessert wurde. Das Problem muß also auch heute noch als nicht befriedigend gelöst angesehen werden, wenn auch Konopinski und Uhlenbeck in einer neueren Arbeit[4] gezeigt haben, daß für verbotene Übergänge (und solche liegen bei den gut untersuchten Fällen wie RaE vor) auch im Rahmen von Fermis Theorie die Form der Spektren merklich verändert und durch eine konsequente Benutzung des Fermischen Feldes erklärbar ist.

Nach allen theoretischen Vorstellungen ist nun die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Elektrons durch einen β-aktiven Atomkern proportional dem Betragsquadrat der Elektron-Eigenfunktion an der Oberfläche des Kernes. Diese Größe hängt wohl weniger von der Kernstruktur ab, als vor allem vom Verlauf des äußeren elektrischen Kernfeldes und damit von der Kernladung. Man muß deshalb den Verlauf der Eigenfunktion im elektrostatischen Felde des Atomkerns und der Elektronenhülle kennen. Dadurch entsteht die Aufgabe, die Dirac-Gleichungen zu lösen für einen Potentialverlauf, wie er einem solchen Felde entspricht. Diese Aufgabe hat Fermi für große Z genähert bereits in seiner grundlegenden Arbeit[1] gelöst; für kleinere Z ist die Berechnung auf Grund der dort gemachten Angaben nicht schwer, solange die Beschränkung auf das Coulomb-Feld des Kernes genügt. Ob nicht vielleicht der Einfluß der Hüllelektronen das β-Spektrum noch

[1] E. Fermi, Z. Physik **88**, 161 [1934].
[2] A. Flammersfeld, Z. Physik **112**, 727 [1939].
[3] E. J. Konopinski u. G. E. Uhlenbeck, Physic. Rev. **48**, 7 [1925].
[4] E. J. Konopinski u. G. E. Uhlenbeck, Physic. Rev. **60**, 308 [1941].

merklich verändert, soll im folgenden untersucht werden.

Das Prinzip der Rechnung ist einfach zu beschreiben. Wir beschränken uns auf drehimpulslose Zustände, etwa mit den Diracschen Quantenzahlen $k = 1$, $m = 0$. Dann lassen sich die vier Dirac-Funktionen schreiben

$$u_1 = -\frac{i}{r}\varphi_1(r);\; u_2 = 0;\; u_3 = \frac{1}{r}\varphi_2(r)\cos\vartheta;$$
$$u_4 = \frac{1}{r}\varphi_2(r)\sin\vartheta\, e^{i\varphi}, \tag{1}$$

wobei die Funktionen φ_1 und φ_2 den Gleichungen genügen müssen

$$\left.\begin{aligned}\left(W - m c^2 - V(r)\right)\varphi_1 &= -\hbar c\left(\varphi_2' + \frac{1}{r}\varphi_2\right),\\ \left(W + m c^2 - V(r)\right)\varphi_2 &= -\hbar c\left(\varphi_1' + \frac{1}{r}\varphi_1\right).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hierbei ist $W = E + mc^2$ die Energie des Elektrons unter Einschluß der Ruhenergie, und $V(r)$ das Potentialfeld. Hierfür setzen wir das nach Fermi abgeschirmte Coulomb-Feld des Kerns

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}\chi(r/r_0), \tag{3}$$

wobei

$$r_0 = \frac{3^{2/3}\pi^{2/3}}{2^{7/3}} Z^{-\frac{1}{3}}\frac{\hbar^2}{m e^2} = 0{,}886\, Z^{-\frac{1}{3}}\frac{\hbar^2}{m e^2} \tag{4}$$

ist. Setzt man $\chi = 1$, so liegt der Fall des reinen Coulomb-Feldes vor, der bisher allein in der Literatur behandelt ist; für ein neutrales Atom kann man am bequemsten die Näherungsformel von S. Rozental[5] benutzen:

$$\chi(r/r_0) = 0{,}7345\, e^{-0{,}562\, r/r_0} + 0{,}2655\, e^{-3{,}392\, r/r_0}. \tag{5}$$

Die Gln. (2) werden numerisch integriert unter Verwendung einer Potenzreihenentwicklung sowohl von χ als von φ_1 und φ_2 für $r \ll \hbar/mc$, mit deren Hilfe die Eigenfunktionen am Kernrand ($r = R \ll \hbar/mc$) ausgedrückt werden. Alsdann wird die Integration nach einem besonderen Verfahren numerisch weitergeführt. Dabei erhält man schließlich für $r \gg r_0$ die asymptotische Lösung

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= A\sin(kr + \delta)\\ \varphi_2 &= -\sqrt{\frac{E}{E + 2mc^2}}\,A\\ &\left[-\cos(kr+\delta) + \frac{1}{kr}\sin(kr+\delta)\right]\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

mit

$$k = \frac{1}{\hbar c}\sqrt{E(E + 2mc^2)},$$

wobei Amplitude A und Phase δ aus der numerischen Integration folgen.

Wir bezeichnen nun als β-Faktor denjenigen Faktor, mit dem wir die β-Emissionswahrscheinlichkeit noch multiplizieren müssen, wenn wir bei ihrer Berechnung zunächst das äußere Feld des Kernes und der Elektronenhülle vernachlässigt haben. Dies Verhältnis ist gleich dem von $|\psi|^2 = |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2$ am Kernrand $r = R$, wenn wir bei φ_1, φ_2 einmal das äußere Feld berücksichtigen und einmal nicht, für $r \to \infty$ in beiden Fällen aber auf die gleiche Amplitude normieren. Da nun im kräftefreien Falle die Lösung in Strenge lautet

$$\varphi_1^0 = A\sin kr$$
$$\varphi_2^0 = -\sqrt{\frac{E}{E+2mc^2}}\,A\left[-\cos kr + \frac{\sin kr}{kr}\right], \tag{7}$$

wird für $r = R \ll 1/k$:

$$|\varphi_1^0|^2 + |\varphi_2^0|^2 \approx A^2 k^2 R^2 \tag{8}$$

und daher unser Faktor

$$\beta = \frac{|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2}{A^2 k^2 R^2}. \tag{6}$$

Der Faktor β wurde für RaE (Folgeelement Po, $Z = 84$) für verschiedene Elektronen-Energien berechnet. Die Ergebnisse sind in Tab. 1 zusammengestellt: In der letzten Spalten stehen die Werte, die sich für β ergeben, wenn man die Elektronenhülle vernachlässigt und die Dirac-Gleichungen für das reine Coulomb-Feld löst. In diesem Falle läßt sich eine geschlossene Formel für β angeben, nämlich

$$\beta = 2\left|\frac{\Gamma(s + i\omega)}{\Gamma(2s+1)}\right|^2 (2kR)^{-2(1-s)}\, e^{\pi\omega}$$
$$\left(1 + s + \frac{1-s}{\varkappa^2}\right) \tag{10}$$

mit den Abkürzungen

[5] S. Rozental, Z. Physik **98**, 742 [1936].

$$s = \sqrt{1-\alpha^2}, \quad \alpha = \frac{Z e^2}{\hbar c}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{E + 2 m c^2}{E}},$$

$$\omega = \frac{1}{2}\, \alpha \left(\varkappa + \frac{1}{\varkappa}\right). \qquad (11)$$

Tab. 1 zeigt, daß sich fast kein Unterschied zwischen den so berechneten β-Werten mit und ohne Einfluß der Hüllelektronen ergibt, sogar bei der kleinen Energie von $E = 0{,}05\ mc^2 \approx 25$ keV. Wenn sich aber bei einem so großen Z schon kaum eine Abweichung zwischen den mit und ohne äußeres Feld berechneten β-Werten zeigt, kann für $E > 50$ keV im ganzen Periodischen System der Einfluß der Elektronenhülle auf das β-Spektrum vernachlässigt werden.

E/mc^2	β neutrales Atom	β nackter Kern
0,05	99,6	103,5
0,5	35,1	35,2
2,0	21,4	21,3

Tab. 1. β-Faktoren für RaE.

Für die Berechnung der Form des β-Spektrums genügt also Gl. (10) zur Berücksichtigung aller äußeren Felder. Wegen ihres etwas komplizierten Aufbaus wurden hiernach — also für das reine Coulomb-Feld — die β-Werte numerisch als Funktion von Z und E berechnet. Die Ergebnisse zeigt Tab. 2. Dabei ist noch unterschieden zwischen den Faktoren β^- und β^+ für Emission negativer und positiver Elektronen, wobei die letzteren leicht durch Umkehr des Vorzeichens von α aus Gl. (10) hervorgehen.

Z	$E=0{,}05$	$E=0{,}10$	$E=0{,}15$	$E=0{,}2$	$E=0{,}5$	$E=1$	$E=2$	$E=5$
a) negative Elektronen (β^-)								
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
5	1,16	1,16	1,15	1,15	1,12	1,11	1,11	1,10
10	1,98	1,69	1,58	1,51	1,37	1,32	1,29	1,27
15	2,75	2,22	2,00	1,88	1,65	1,55	1,49	1,46
20	3,61	2,79	2,58	2,33	1,96	1,80	1,72	1,67
25	4,80	3,63	3,15	2,89	2,36	2,14	2,03	1,93
30	6,15	4,58	3,92	3,60	2,81	2,54	2,37	2,23
35	8,04	5,90	5,02	4,54	3,54	3,09	2,84	2,65
40	10,35	7,50	6,31	5,71	4,32	3,72	3,37	3,08
45	12,9	9,23	7,86	6,99	5,23	4,47	3,99	3,57
50	16,8	12,15	10,12	9,04	6,53	5,52	4,93	4,31
55	21,5	15,6	13,1	11,5	8,34	6,91	5,99	5,20
60	27,1	21,1	16,3	14,4	10,30	8,43	7,24	6,09
65	35,3	25,5	21,3	18,7	13,1	10,70	8,97	7,39
70	46,5	33,2	27,5	24,4	16,9	13,4	11,15	8,90
75	62,6	44,5	36,5	32,2	21,9	17,4	14,1	10,84
80	83,1	58,6	48,1	42,3	28,6	22,4	17,7	13,5
85	112	79	65	57,5	38,2	28,9	22,9	16,6
90	153	107	87,3	77,1	50,3	37,8	29,2	20,1
95	214	149	122	105,2	69,8	51,5	38,1	25,6
b) positive Elektronen ($\beta+$)								
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
5	0,548	0,673	0,726	0,758	0,823	0,852	0,867	0,874
10	0,440	0,560	0,624	0,660	0,738	0,778	0,794	0,800
15	0,286	0,425	0,496	0,541	0,655	0,699	0,720	0,730
20	0,178	0,310	0,405	0,443	0,572	0,628	0,652	0,663
25	0,112	0,234	0,313	0,365	0,506	0,572	0,604	0,606
30	0,0671	0,169	0,244	0,299	0,441	0,518	0,550	0,555
35	0,0418	0,126	0,197	0,248	0,407	0,485	0,518	0,521
40	0,0249	0,0918	0,154	0,206	0,365	0,446	0,480	0,479
45	0,0150	0,0662	0,123	0,169	0,328	0,416	0,450	0,445
50	0,0089	0,0488	0,098	0,141	0,297	0,388	0,428	0,421
55	0,0054	0,0364	0,080	0,119	0,278	0,374	0,410	0,401
60	0,0034	0,0249	0,063	0,099	0,255	0,351	0,392	0,376
65	0,0020	0,0198	0,051	0,085	0,235	0,338	0,378	0,358
70	0,0013	0,0151	0,042	0,073	0,224	0,329	0,370	0,344
75	0,0008	0,0117	0,035	0,064	0,214	0,327	0,367	0,334
80	0,0005	0,0088	0,030	0,055	0,207	0,324	0,363	0,327
85	0,0003	0,0067	0,025	0,048	0,198	0,319	0,363	0,316
90	0,0002	0,0053	0,021	0,044	0,195	0,324	0,367	0,308
95	0,0001	0,0043	0,018	0,039	0,198	0,333	0,375	0,307

Tab. 2. β-Faktoren als Funktionen von Z, E.